格付け情報の市場における評判の定量的比較方法に関する一考察

Quantification Method of Reputation of Rating Information

萩　原　統　宏
Motohiro Hagiwara

目　次

1. はじめに

萩原（2004）は，異なる格付け機関によって公表された格付けを，デフォルト確率の測度としての正確さについて，Kullbuck-Leibler 情報量（以後，KL 情報量と省略）に基づいて比較する方法を提示した。本稿は，萩原（2004）に対して，より実際的な想定の下で，改善を試みるものである。具体的には，格付けが示唆するデフォルト確率と，市場において評価されている債券の利回りスプレッド（以後，スプレッドと省略）によって示唆されるデフォルト確率に基づいて，それらの確率分布の乖離の度合いを，ある一時点において，KL 情報量に基づいて定量化する方法を考える。また，萩原（2004）においては，比較作業においてある格付け対象に関する時系列データが必要であったが，本研究においては，ある一つの時点における複数の格付け対象に関する格付けデータが必要とされる。スプレッドの水準は不完全な情報を持つ市場参加者によって決定されるものであることと，スプレッドをデフォルト確率の測度とすることの妥当性に関する議論は本稿の目的ではないため，本稿は，格付け情報に対する市場における「評判」を比較することを目的とする。「評判」を比較することを通じて，格付け情報とスプレッドが整合的であるほど，その格付け情報は市場参加者の間で高い評判を得ていると捉える立場に基づく。

格付けに関する先行研究は，格付けの決定構造，および格付けの水準とデフォルト確率との関係の 2 点が中心的であり，本研究が先行研究とする，異なる格付け機関（例えば，スタンダードアンドプアーズ社（S & P）とムーディーズ社（Moody's））による格付け比較を目的とする研究群，およびそれらの格付け間の相関関係について分析する研究群は，格付けに関する研究群のうちでは比較的歴史が浅い。先行研究は，主に，格付け水準あるいはその変化が債券の市場において取引されている利回り，あるいはスプレッドに及ぼす影響に注目してきた。つまり，格付け変更後に，スプレッドがより敏感に反応する事実に基づいて，格付け情報に対する市場における評価を測ってきた。これに対して，本研究は，まず，萩原（2004）と同様に，格付けが含意するデフォルト確率の基礎変数である状態変数を想定し，格付け機関は，格付け情報を生産するにあたり，その状態変数の確率分布を推定していると想定する。また，本研究における新たな想定として，スプレッドが含意するデフォルト確率の基礎変数である状態変数および状態変数の確率分布が含意されていることも想定される。そして，格付け機関ごとの推定確率分布とスプレッドに含意される確率分布の乖離に注目し，比較を試みる。確率分布の乖離は，KL 情報量を援用して定量化を行い，比較可能とする。結果として，定量化された乖離が小さい格付け機関ほど，市場において高い評判を獲得していると評価される。

本稿の構造について述べる。まず，第 2 章 1 節は，格付け及びスプレッドの決定構造に関する，本稿における想定について説明する。第 2 章 2 節は，KL 情報量の概念と対数尤度の本研究における援用の仕方について具体的に説明する。次に第 3 章は，状態変数の格付け機関ごとの推定確率分布と市場において含意される確率分布との乖離を定量化し，市場における評判を定量的に比較するための方法について説明する。最後に，本研究の結論を展望し，発展の方向性について述べる。

2. 前　提

2-1　格付けの決定

本節は，本稿において想定される格付けの決定構造について説明する。格付け機関による格付けの対象となるのは，証券，その発行体である企業，政府，政府系機関，地方公共団体など様々であるが，以下ではそれらをまとめて格付け対象と呼ぶことにする。

ある格付け対象のおかれた財務状態は確率変数 $\tilde{S}$ によって決定されるとする。$\tilde{S}$ は各時点における格付け対象の状態変数であり，デフォルト確率を決定する。$\tilde{S}$ は格付け対象のデフォルト確率に影響を及ぼすミクロ的要因，マクロ的要因をはじめとする多くの要因によって決定されるが，その決定構造は本研究の分析対象ではない。本研究は，$\tilde{S}$ が互いに不完全に相関する多くの要因によって決定されていることから，中心極限定理に基づいて，長期的に正規分布に従うことを仮定する[(1)]。

（1） Srinivasan and Basu (1989) (p. 211) に基づけば，正規分布と極端に性質の異ならない確率分布であれば，以後の議論の結果に大きな影響は無いと考えられる。

$\tilde{S}$ がある値 S をとる時，状態 S におかれた格付け対象のデフォルト確率 $DP(S)$ は，

$$DP(S)=\int_{-\infty}^{S}\Phi(Z)dZ=\int_{-\infty}^{S}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}Z^2\right)dZ \qquad (1)$$

$\Phi(z)$：標準正規分布の密度関数

によって与えられるとする。$\tilde{S}$ の値が低下すればデフォルト確率も低下し，$\tilde{S}$ の値が上昇すればデフォルト確率も上昇することになる。ある格付け対象についてデフォルト確率の基礎変数である状態変数 $\tilde{S}$ が真の正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ にしたがっているとし，その確率密度関数を

$$f(\tilde{S})=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\exp\left\{-\frac{(\tilde{S}-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} \qquad (2)$$

とする。ここで，$\tilde{S}$ の期待値 μ，標準偏差 σ は，格付け機関にとって未知であるが，長期的に任意の格付け対象について同じであるとする。ただし，格付け対象ごとに $\tilde{S}$ の実現値が異なることによって，格付けの相違が生じるものとして捉える。格付け機関の目的は，真の確率密度関数 $f(\tilde{S})$ を推定することであり，推定された確率密度関数に基づいて，デフォルト確率 $DP(S)$ の推定を同時に行うとする。しかし実際には，情報の不完全性により，格付け機関は，真の確率密度関数 $f(\tilde{S})$ とは異なる推定確率密度関数（$g(\tilde{S})$ とする）に基づいて，デフォルト確率を推定することになる。つまり，格付け機関は状態変数 $\tilde{S}=S'$ である格付け対象について，デフォルト確率を，

$$DP(S')=\int_{-\infty}^{S'}g(S)dS \qquad (3)$$

と推定することになる。この関数 $g(\tilde{S})$ は，格付け機関ごとに異なる。実際の格付け情報は，連続変数である状態変数 $\tilde{S}$ がカテゴライズされたデータとして考えられる。$g(\tilde{S})$ の推定手順については，3-2 節において述べる。

2-2　スプレッドの決定

本節は，スプレッドの決定構造に関する本研究の想定について説明する。債券市場の参加者は，市場においてスプレッドを決定するにあたり，基礎変数として，格付けを決定する基礎変数と同じ確率変数 $\tilde{S}$ に基づくとする。

基礎変数 $\tilde{S}$ の真の確率密度関数

$$f(\tilde{S})=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\exp\left\{-\frac{(\tilde{S}-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} \qquad (2)$$

については，格付け機関と同様に，市場参加者にとっても未知であるとする。市場参加者も，スプレッドの決定にあたり，真の確率密度関数 $f(\tilde{S})$ と，デフォルト確率 $DP(S)$ の推定を同時に行っていると想定する。しかし実際には，格付け機関と同様に，情報の不完全性により，真の確率密度関数 $f(\tilde{S})$ とは異なる推定確率密度関数（$g_m(\tilde{S})$ とする）が推定されることになる。また $g_m(\tilde{S})$ は，一般に，格付け機関が推定した関数 $g(\tilde{S})$ とは異なると想定される。市場において決

定されるスプレッドは，連続変数である状態変数 $\tilde{S}$ によって決定される連続変数として考えられる。つまり，基礎変数 $\tilde{S}=S'$ なるある格付け対象について，市場参加者はデフォルト確率を，(3)と類似した

$$DP(S')=\int_{-\infty}^{S'} g_m(S)dS \tag{3}$$

によって推定し，このデフォルト確率に基づいてスプレッドが決定されると考える。デフォルト確率とスプレッドの関係式については，本研究の分析の対象ではないが，$g_m(\tilde{S})$ の推定手順と想定については，3-2節において述べる。

2-3 KL情報量の援用方法

格付け機関の目的は，格付けデータ（$\tilde{R}$ とする）の基礎変数である $\tilde{S}$ の真の確率密度関数

$$f(\tilde{S})=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\exp\left\{-\frac{(\tilde{S}-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} \tag{2}$$

を推定することである。実際に推定される確率密度関数は，真の確率密度関数とは乖離していると考えられるため，$f(\tilde{S})$ に対する格付け機関 A の推定確率密度関数を

$$g(\tilde{S})=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_A}\exp\left\{-\frac{(\tilde{S}-\mu_A)^2}{2\sigma_A^2}\right\} \tag{4}$$

とおき，この式をモデルと呼ぶことにする。$f(\tilde{S})$ と $g(\tilde{S})$ の確率分布の近さを数値化する基準としてKL情報量

$$\begin{aligned}I(f;g)&=E_{\tilde{S}}\log\left\{\frac{f(\tilde{S})}{g(\tilde{S})}\right\}=\int_{-\infty}^{\infty} f(\tilde{S})\log\frac{f(\tilde{S})}{g(\tilde{S})}dS\\&=\int_{-\infty}^{\infty} f(\tilde{S})\log f(\tilde{S})dS-\int_{-\infty}^{\infty} f(\tilde{S})\log g(\tilde{S})dS\end{aligned} \tag{5}$$

を用いる。ここで，$E_{\tilde{S}}(\cdot)$ は確率密度関数 $f(\tilde{S})$ に基づく期待値を意味する。KL情報量の符号を反転させた式，

$$I(f;g)=-E_{\tilde{S}}\log\left\{\frac{f(\tilde{S})}{g(\tilde{S})}\right\}=E_{\tilde{S}}\log\left\{\frac{f(\tilde{S})}{g(\tilde{S})}\right\}=B(f;g) \tag{6}$$

は（負の）エントロピーと呼ばれる。エントロピーBは，密度関数 $g(\tilde{S})$ による確率分布から得た n 個の標本の分布が真の確率分布 $f(\tilde{S})$ に一致する確率の対数の $1/n$ にほぼ等しいと解釈できる。モデル $g(\tilde{S})$ が真の分布 $f(\tilde{S})$ に近いほど，エントロピー B が大きくなり，KL情報量が小さくなる。したがって，最良のモデルとは，エントロピー B が最大になる，つまりKL情報量が最小になるモデルであると考えられる(2)。

モデル $g(\tilde{S})$ による $\tilde{S}$ に対する n 個の推定値を $S_1, S_2, \cdots, S_n$ とすれば，KL情報量は

(2) 坂元他 (2001) 参照。この考え方をエントロピー最大化原理という。

$$I(f;g) = E_{\tilde{S}} \log\left\{\frac{f(\tilde{S})}{g(\tilde{S})}\right\} = \sum_{i=1}^{n} f(\tilde{S}_i)\log f(\tilde{S}_i) - \sum_{i=1}^{n} f(\tilde{S}_i)\log g(\tilde{S}) \tag{7}$$

と変形される。格付け情報は離散的な値をとるため，（8）式によってKL情報量を計算することになる。

異なる格付け機関は，共通の真の分布 $f(\tilde{S})$ に対して，異なるモデル $g(\tilde{S})$ によって推定を試みていると考えられる。ここで，KL情報量は，異なる確率分布の乖離の度合い，つまり格付け能力の優劣を数値化することができる。なぜなら，格付け能力が優れていれば，$f(\tilde{S})$ と $g(\tilde{S})$ の乖離の度合いは低く，KL情報量は小さな値をとり，逆に格付け能力が劣っていれば，KL情報量は大きな値をとることになるからである。

ところで，真の確率密度関数 $f(\tilde{S})$ を特定することは，非常に困難であり，それに関する議論は本研究の目的には含まれない。そこで，本研究は，真の確率密度関数 $f(\tilde{S})$ の代わりに，市場が含意する確率密度関数 $g_m(\tilde{S})$ を用いる。このとき，（6）式のKL情報量は，格付け機関の能力を意味するものとは必ずしも言えなくなり，格付け機関の市場における信用度，あるいは評判を意味していることになる。なぜなら，KL情報量の値が小さければ，該当する格付け機関のモデル $g(\tilde{S})$ は，市場が含意する確率密度関数 $g_m(\tilde{S})$ に近い形状を持つことになり，市場におけるスプレッドの決定に対して，モデル $g(\tilde{S})$ で示唆される格付け情報がより重要な影響を与えていると解釈できるからである。

3. 評判の定量的比較

3-1　平均対数尤度

KL情報量の定義式（5）は，真の確率密度関数 $f(\tilde{S})$ の代わりに，市場が含意する確率密度関数 $g_m(\tilde{S})$ を用いると，

$$I(f;g) = \int_{-\infty}^{\infty} g_m(\tilde{S})\log g_m(\tilde{S})dS - \int_{-\infty}^{\infty} g_m(\tilde{S})\log g(\tilde{S})dS \tag{8}$$

と書き直される。この式において，右辺の第1項は，異なる格付け機関の間で共通の関数 $g_m(\tilde{S})$ によって決定されるため，格付け機関が異なる，すなわちモデル $g(\tilde{S})$ が異なったとしても，$g(\tilde{S})$ のパラメータによって影響を受けない。したがって，異なるモデル $g(\tilde{S})$ の間でKL情報量の大小関係を知るには，第2項

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_m(\tilde{S})\log g(\tilde{S})dS \tag{9}$$

の大小関係が分かればよい。この式は，市場が含意する確率分布に基づく，対数尤度 $\log g(\tilde{S})$ の期待値，いわば，条件付きの平均対数尤度と解釈できる。条件付き平均対数尤度が大きいほど，KL情報量の値は小さくなり，格付け機関が推定する $g(\tilde{S})$ は市場が含意する確率密度関数

$g_m(\tilde{S})$ により近い形状を持つと評価できる(3)。

3-2　格付け機関と市場の確率密度関数の推定

前節の条件付き平均対数尤度を評価するには，確率密度関数 $g(\tilde{S})$，$g_m(\tilde{S})$ の各状態変数 $S_1, S_2, \cdots, S_n$ に対する値 $g(S_1), g(S_2), \cdots, g(S_n)$，$g_m(S_1), g_m(S_2), \cdots, g_m(S_n)$ が必要である。本節では，その推定方法について述べ，平均対数尤度(9)の定量化の手順について述べる。ある時点において，複数の格付け対象に対して，格付け機関 A が格付けを行っているとし，そのモデルを(4)に類似した

$$g_A(\tilde{S}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_A} \exp\left\{-\frac{(\tilde{S}-\mu_A)^2}{2\sigma_A^2}\right\} \tag{10}$$

とおく。また，市場における推定モデルを同様の

$$g_m(\tilde{S}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_m} \exp\left\{-\frac{(\tilde{S}-\mu_m)^2}{2\sigma_m^2}\right\} \tag{11}$$

とおく。ここでは，ある格付け対象のおかれた状態変数 $\tilde{S}$ の分布について，格付け機関 A と市場は，それぞれ

$$\tilde{S} \sim N(\mu_A, \sigma_A^2) \tag{12}$$

$$\tilde{S} \sim N(\mu_m, \sigma_m^2) \tag{13}$$

と推定していることになる。格付け機関 A と市場は，状態変数 $\tilde{S} = \hat{S}$ にある格付け対象について，

$$DP_A(\hat{S}) = \int_{-\infty}^{\hat{S}} g_A(S)dS \tag{14}$$

$$DP_m(\hat{S}) = \int_{-\infty}^{\hat{S}} g_m(S)dS \tag{15}$$

によってデフォルト確率 $DP_A(\hat{S})$，$DP_m(\hat{S})$ を推定すると想定される。格付けは，デフォルト確率の基礎変数である状態変数 $\tilde{S}$ に基づいて決定されるカテゴリカルデータである。したがって，ある格付け機関による格付けが同じであっても，推定された状態変数 $\hat{S}$ およびデフォルト確率 $DP(\hat{S})$ が異なる可能性がある。この点については，萩原（2004）と同様に，本稿における具体的な計算においては，ある格付け機関の格付け $\tilde{R} = k(= 1, 2, \cdots, m)$ に対応する推定デフォルト確率として，過去の平均デフォルト確率の実績値を用いることを想定する。

以上の想定に基づいて，格付け対象 $1, 2, \cdots n$ について格付け機関 A による格付け，(14)に基づく推定デフォルト確率の値が，下のように与えられたとする。

格付け（公表情報）

$$\tilde{R}_{A,1}, \tilde{R}_{A,2}, \cdots \tilde{R}_{A,n-1}, \tilde{R}_{A,n} \tag{16}$$

（3） 市場の評価 $g_m(\tilde{S})$ は，真の確率分布関数 $f(\tilde{S})$ に等しいことを仮定する場合，萩原（2004）におけるように，対数尤度の大小関係を比較するという簡単な方法で定量的な比較が可能である。

推定デフォルト確率（各格付けの平均デフォルト確率の実績値）

$$DP_A(\hat{S}_1),\, DP_A(\hat{S}_2),\, \cdots DP_A(\hat{S}_{n-1}),\, DP_A(\hat{S}_n) \tag{17}$$

これらをもとに，まず，(14)式に基づいて，$S_1, S_2, \cdots, S_n$ が推定される。次に，この $S_1, S_2, \cdots, S_n$ に基づいて，推定確率密度関数 $g_A(\tilde{S})$ の各状態変数に対する値 $g_A(S_1), g_A(S_2), \cdots, g_A(S_n)$ を計算するためには，$g_A(\tilde{S})$ のパラメータ μ_A，σ_A を推定しなければならない。本稿は，離散的な状態変数 $\hat{S}_1, \hat{S}_2, \cdots, \hat{S}_n$ に対応する対数尤度の最大化問題

$$\max_{\mu_A,\, \sigma_A} \sum_{i=1}^{n} \log g_A(\hat{S}_i, \mu_A, \sigma_A) \tag{18}$$

$$\int_{-\infty}^{\hat{S}_i} \Phi(Z)dZ = DP_A(\hat{S}_i) \quad i = 1, 2, \cdots, n \quad -\infty \leq \mu_A \leq +\infty \quad 0 \leq \sigma_A \leq +\infty \tag{19}$$

を最大化させるようなパラメータ μ_A^*，σ_A^* および関数

$$g_A^*(\tilde{S}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_A^*} \exp\left\{-\frac{(\tilde{S}-\mu_A^*)^2}{2\sigma_A^{*2}}\right\} \tag{22}$$

を推定する。演算手順としては，μ_A，σ_A 両方を変数として対数尤度を最大化する発見的手法によって，解として μ_A^*，σ_A^* の推定が可能であると考える。この μ_A^*，σ_A^* はそれぞれ，$S_1, S_2, \cdots, S_n$ の平均の近傍，標準偏差の近傍にあることが推測される。対数尤度最大化問題(18)(19)は，市場で観測された格付け情報と過去のデフォルト確率の実績値に対して，最も整合的な，デフォルト確率密度関数を推定していることになる。債券市場の効率性を仮定し，対数尤度最大化によって推定された μ_A^*，σ_A^* に基づく，異なる格付け機関による格付けに関する比較については，萩原(2004) の 3-3 節を参照されたい。次に，条件付き平均対数尤度

$$\sum_{i=1}^{n} g_m(\hat{S}_i) \log g_A^*(\hat{S}_i) \tag{21}$$

の推定を行うために必要な，市場が含意する $g_m(\tilde{S})$ を推定する。本研究は，同時に公表されている複数の格付け情報（例えば，S＆Pとムーディーズ社による格付け）に対して，最も整合的な性質を持つ $g_m(\tilde{S})$ として，$g_m(\tilde{S})$ を推定する。具体的には，上式の条件付き平均対数尤度の合計の最大化によって推定する。問題は，格付け機関が m 社ある場合に，

$$\max_{\mu_m,\, \sigma_m} \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} g_m(\hat{S}_i) \log g_j^*(\hat{S}_i) \tag{22}$$

$g_j^*(\hat{S}_i)$：格付け機関 j のモデル　$j = 1, 2, \cdots, m$

と定式化され，(18)(19)と同様の発見的な演算過程を経て，解として μ_m^*，σ_m^* が得られ，$g_m^*(\tilde{S})$ が推定されることになる。ここで，$g_j^*(\hat{S}_i)$ は，全ての格付け機関について，(18)(19)の問題を解くことによって，既に推定されていることが必要である。

3-3 条件付き平均対数尤度に基づく評判の比較

前節で推定された $g_m^*(\tilde{S})g_j^*(\tilde{S})$ に基づいて，条件付き平均対数尤度

$$\sum_{i=1}^{n} g_m^*(\tilde{S}_i)\log g_j^*(\tilde{S}_i) \tag{23}$$

を格付け機関 ($j=1, 2, \cdots, m$) ごとに計算する。これは，格付け機関が推定する $g_j^*(\tilde{S})$ と，全ての格付け情報を包含する情報に基づいて債券市場の参加者が決定する $g_m^*(\tilde{S})$ との乖離度合いを定量化したものである。条件付き平均対数尤度の値が大きければ，債券市場参加者はスプレッドの評価において，その格付け情報の他に追加的な多くの情報を必要としており，格付け情報に対する信憑性，評判は低いとする解釈が可能である。逆に，条件付き平均対数尤度の値が小さければ，市場参加者はその格付け情報の他に必要とされる情報は少なく，格付け情報に対する信憑性，評判は高いとする解釈が可能である。

4. おわりに

本稿は，企業，有価証券など，ある時点において，共通の複数の格付け対象に対して，複数の格付け機関が格付けを付与している状況を想定し，それらの複数の格付け機関について，市場における評判を定量化・比較する方法を提示した。

本稿は，萩原 (2004) に対する発展的研究として位置づけられる。本稿の特徴としては，まず，デフォルト確率の真の分布を推定するという困難な問題を回避するため，格付け情報の市場における評判を定量的に比較する方法を提示した点である。次に，KL 情報量の援用により，真の確率分布と推定確率分布との乖離を定量化することによって，格付け機関が 3 つ以上，多数存在する場合にも，格付け能力を比較可能にした。さらに，萩原 (2004) においても試みられたことではあるが，格付けの精度比較だけでなく，格付けの格付け機関ごとの特徴についても同時に比較可能にする点も挙げられる。

参考文献

Srinivasan, V., and Basu, A. K., 1989, The Metric Quality of Ordered Categorical Data, *Marketing Science* 8, 205-230.

坂元慶行，石黒真木夫，北川源四郎：「情報量統計学」共立出版 (2001)

萩原統宏：「Kullbuck-Leibler 情報量に基づく格付け情報の比較方法の提示」『明大社会科学研究所紀要』第 43 巻，第 1 号，pp. 155-163. (2004)